ثالثاً : طرائق حساب المحددات من المراتب العليا :

① طريقة تخفيض مرتبة المحدد Δ_n :

فكرة الطريقة : نجعل جميع عناصر أحد الأسطر (أحد الأعمدة) أصفاراً عدا عنصر واحد فقط ثم ننشر المحدد Δ_n وفق هذا السطر (العمود) فنحصل على محدد من المرتبة Δ_{n-1} ثم نكرر هذه العملية على المحدد الناتج و نستمر بذلك حتى نحصل على محدد من المرتبة الثانية Δ_2.

تطبيق عددي: احسب قيمة المحدد التالي : $\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$

الحل : نجري التحويلات السطرية : $R_2 \to R_2 - 2R_1$ ، $R_3 \to R_3 - 3R_1$ ، $R_4 \to R_4 - 4R_1$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-7\\0&-2&-8&-10\\0&-7&-10&-13\end{vmatrix}$$

ننشر وفق العمود الأول :

$$\Delta=(+1)\begin{vmatrix}-1&-2&-7\\-2&-8&-10\\-7&-10&-13\end{vmatrix}$$

نجري التحويلات السطرية : $R_2 \to R_2 - 2R_1$ ، $R_3 \to R_3 - 7R_1$

$$\Delta=(+1)\begin{vmatrix}-1&-2&-7\\0&-4&4\\0&4&36\end{vmatrix}=(+1)(-1)\begin{vmatrix}-4&4\\4&36\end{vmatrix}$$

$$\Delta=(+1)(-1)[(-4)(36)-(4)(4)]=-(-160)=\boxed{160}$$

② طريقة تحويل المحدد Δ_n إلى الشكل المثلثي:

فكرة الطريقة : تعتمد هذه الطريقة على تحويل المحدد إلى محدد مثلثي علوي أو سفلي و ذلك بجعل جميع العناصر الواقعة فوق قطره الرئيسي أو تحت قطره الرئيسي أصفاراً ، و بذلك تكون قيمة المحدد مساوية لداء عناصر قطره الرئيسي.

تطبيق عددي: احسب قيمة المحدد التالي : $\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1&5\\1&5&1&1\\1&1&5&1\\5&1&1&1\end{vmatrix}$

الحل : نجمع جميع الأعمدة إلى العمود الأول :

$$\Delta=\begin{vmatrix}8 & 1 & 1 & 5\\ 8 & 5 & 1 & 1\\ 8 & 1 & 5 & 1\\ 8 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(8)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 5\\ 1 & 5 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\quad \begin{matrix}R2\to R2-R1\\ R3\to R3-R1\\ R4\to R4-R1\end{matrix}$$

$$\Delta=(8)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 4 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 4 & -4\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{vmatrix}=(8)(1)(4)(4)(-4)=-512$$

③ طريقة تفريق المحدد إلى محددين أو أكثر:

فكرة الطريقة : تعتمد هذه الطريقة على تحليل المحدد وفق أحد أعمدته أو احد أسطره إلى محددين أو أكثر من نفس المرتبة ، بحيث نحصل على محددات جديدة تكون أسهل في عملية حساب القيمة.

تطبيق عددي: احسب قيمة المحدد التالي

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 3 & 3 & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & n-2 & n-2\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & n-1\\ x & x & x & \cdots & x & x & x+n\end{vmatrix}$$

الحل : نكتب المحدد Δ_n بالشكل التالي : (انظر السطر الأخير)

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 3 & 3 & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & n-2 & n-2\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & n-1\\ 0+x & 0+x & 0+x & \cdots & 0+x & 0+x & n+x\end{vmatrix}$$

نكتب المحدد Δ_n على شكل مجموع محددين يختلفان فقط بالسطر الأخير كما يلي:

$$\Delta_n=\underbrace{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 3 & 3 & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & n-2 & n-2\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & n-1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n\end{vmatrix}}_{=1\times2\times3\times\cdots(n-2)(n-1)(n)=n!}+\underbrace{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 3 & 3 & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & n-2 & n-2\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & n-1\\ x & x & x & \cdots & x & x & x\end{vmatrix}}_{R_1,R_n\ \text{تناسب}}$$

$$\Delta_n=[1\times2\times3\times\cdots(n-2)(n-1)(n)]+[0]=n!+0=n!$$

④ طريقة إخراج المضاريب الخطية (محدد فاندرموند) :

محدد فاندرموند : محدد من نوع خاص ، سطره الأول جميع العناصر فيه قيمتها تساوي الواحد أما السطر الثاني فهو كيفي ، السطر الثالث يكون مربع السطر الثاني ، السطر الرابع يكون مكعب السطر الثاني . هكذا ...

يأخذ محدد فاندرموند أحد الشكلين التاليين:

$$V=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}$$

$$V=(x_4-x_3)(x_4-x_2)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)$$

$$V=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix}$$

$$V=(x_4-x_3)(x_4-x_2)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)$$

تمرين :استبدل الرمز (★) بالعدد المناسب حتى يكون المحدد الآتي هو محدد فاندرموند ثم احسب قيمته :

$$V=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \\ \star & -1 & 8 & -8 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$V=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 8 & -8 \end{vmatrix}$$

$$V=(-2-2)(-2+1)(-2-1)(2+1)(2-1)(-1-1)=\boxed{72}$$

رابعاً : المحدد المتناظر و المحدد المتناظر تخالفياً :

المحدد المتناظر : نسمي المحدد الذي تحقق عناصره العلاقة $a_{ij}=a_{ji}$ من أجل جميع قيم i,j محدداً متناظراً بالنسبة لقطره الرئيسي.

تطبيق عددي: ليكن المحدد $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 2 & 3 & \gamma \\ 3 & \gamma & 8 \end{vmatrix}$ **و المطلوب تحديد قيم الثوابت الحقيقية (α,β,γ) التي تجعل المحدد Δ محدداً متناظراً قيمته تساوي $(+1)$.**

الحل : من شروط المسألة نجد :

- المحدد متناظر ← $\alpha = 2 \;\;,\;\; \beta = 3$
- $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & \gamma \\ 3 & \gamma & 8 \end{vmatrix} = +1$ ننشر المحدد Δ حسب ساروس فنجد

$$-\gamma^2 + 12\gamma - 35 = +1$$

$$\gamma^2 - 12\gamma + 36 = 0$$

$$(\gamma - 6)^2 = 0 \;\rightarrow\; \gamma - 6 = 0 \;\rightarrow\; \gamma = 6$$

إذاً قيم الثوابت هي : $\boxed{\alpha = 2 \;\;,\;\; \beta = 3 \;\;,\;\; \gamma = 6}$

المحدد المتناظر تخالفياً : نسمي المحدد الذي تحقق عناصره العلاقة $a_{ij} = -a_{ji}$ من أجل جميع قيم i, j محدداً متناظراً تخالفياً بالنسبة لقطره الرئيسي.

ملاحظة : عناصر القطر الرئيسي في المحدد المتناظر تخالفياً جميعها أصفار.

مبرهنة مهمة جداً : إذا كانت مرتبة المحدد المتناظر تخالفياً فردية فإن قيمة هذا المحدد معدومة.

تمرين: اثبت صحة العلاقة التالية : $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -a & b \\ -1 & a & 0 & -c \\ 1 & -b & c & 0 \end{vmatrix} = (b - a - c)^2$

الحل : نجري التحويلات التالية : $R_3 \rightarrow R_3 + R_2$ ، $R_4 \rightarrow R_4 - R_2$ و ننشر وفق السطر الثاني .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -a & b \\ 0 & a & -a & b-c \\ 0 & -b & a+c & -b \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ a & -a & b-c \\ -b & a+c & -b \end{vmatrix}$$

نجري التحويلات التالية : $C_2 \rightarrow C_2 + C_1$ ، $C_3 \rightarrow C_3 - C_1$ و ننشر وفق العمود الثالث .

$$\Delta = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & b-c-a \\ -b & a+c-b & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (-1)[-(b-c-a)]\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -b & a+c-b \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (b-c-a)[(-1)(a+c-b) - (0)(-b)]$$

$$\Delta = (b-c-a)(b-c-a) = (b-c-a)^2$$